Odense Tekniske Gymnasium

# Studieretningsprojekt 2008/2009
## Opgaveformulering

| Cpr.nr. | Klasse | Navn |
|---|---|---|
| | **3.C** | **Jacob Jensen** |

| Fag 1: Matematik A | Vejleder: SPM |
|---|---|
| Fag 2: Filosofi C | Vejleder: LFN |
| Evt. fag 3: | Vejleder: |

Emne/titel:
**Kurt Gödel og matematisk filosofi**

Opgaveformulering:

- Beskriv kort følgende begreber inden for matematikkens filosofi: platonisme/realisme formalisme, logicisme, konstruktivisme, intuitionisme samt kognitive teorier.
- Gør kort rede for definitionen på et aksiomatisk system.
- Gør rede for Kurt Gödels 2 ufuldstændighedssætninger og deres betydning for et aksiomatisk opbygget system.
- Redegør for Kurt Gödels position som realist/platonist og diskuter hans ufuldstændighedssætningers udfordringer for formalismen.

# Abstract

This assignment shows a simplified prove of Kurt Gödel's two incompleteness theorems, a description of a formal system and Kurt Gödel's position as a mathematical philosopher. To be able to compare his mathematical philosophy with other mathematicians, some other mathematical philosophies are also explained, among these the formalism, whose belief in mathematical philosophy was ruined by Kurt Gödel's two incompleteness theorems. To do this I found a lot of material, unfortunately the most of it, was too difficult, but anyhow I ended up with some documents concerning this matter and with this I made the proof easy to understand, but still thorough enough to give a clear picture of what Kurt Gödel meant with his two incompleteness theorems.

# Indledning

Kurt Gödel udgav i 1931 en afhandling hvori han ændrede synet på matematikken for evigt. Især ramte han formalisterne, ved modbevise deres syn på hvordan matematikken hang sammen. Dette blev gjort med to sølle sætninger, som han beviste. De to såkaldte ufuldstændighedssætninger. Jeg har forsøgt at beskrive beviset for disse, på et let forståeligt sprog, dog kræver det stadig en vis evne til at "læse" matematik, men ellers skulle det gerne være letforståeligt for de fleste.

# Kurt Gödel

Kurt Gödel blev født i 1906 i den østrigske by Brünn, hvor han voksede op som søn af en velhavende tekstilfabrikant. Trods gode odds fra barnsben af, blev han som 6-årig ramt af gigtfeber. Heldigvis (for ham og matematikken) blev han hurtigt rask og han tog herefter den beslutning at han ville forske i sin egen sygdom og fandt frem til at den kunne give hjerteproblemer. Denne opdagelse gjorde, desværre, at Kurt Gödel udviklede hypokondri i en meget ung alder og gik derfor konstant rundt med angsten om at han skulle dø. Denne angst blev katastrofal for ham, da han blev ramt af en harmløs mavelidelse gik han på en meget hård diæt, som endte med at han næsten ikke spiste, da han frygtede for at blive forgiftet gennem maden. Dette gjorde at han som 71-årig døde af underernæring.

Til trods for at hans liv, allerede fra barnsben af, virker til at have været psykisk hårdt for ham, udgav han som 25-årig sin afhandling ”ûber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandtner Systeme”, eller på dansk: ”Om formelt uafgørlige udsagn i Principia Mathematica og beslægtede systemer”. Heri beskrev han blandt andet hans to ufuldstændighedssætninger, som var med til at feje David Hilberts matematiske program af banen. Et enestående eksempel på dette er den store tyske matematiker John von Neumann, der var ved at undervise om lige netop Hilberts matematik, da afhandlingen udkom. Eftersigende skulle han have visket tavlen ren – efter at have hørt om Gödels ”bedrifter” – for at bruge resten af semesteret på at diskutere hans bevis. Altså en opdagelse der revolutionerende matematikken! [1]

# Ufuldstændighedssætning

## *Formelle systemer*

Et formelt (et større aksiomatisk) system indeholder størrelserne: alfabet, formler, variable, konstanter, aksiomer, slutningsregler og beviser, hvor begreberne dækker over følgende[2]:

**Alfabet:** En endelig mængde symboler, altså en begrænset mængde.

[1] http://ipaper.ipapercms.dk/DSB/udogse/2007/September/ (side 48 – 12-02-2009)
[2] http://www2.imm.dtu.dk/~tb/godel.pdf ”side 3” (12-02-2009)

**Formler:** Formler hvori de variable og konstanterne kan indgå

**Konstanter:** Værdier eller objekter der ikke ændrer sig.

**Aksiomer:** En sandhed, der ikke er bevist, men som altid regnes for at være korrekt.

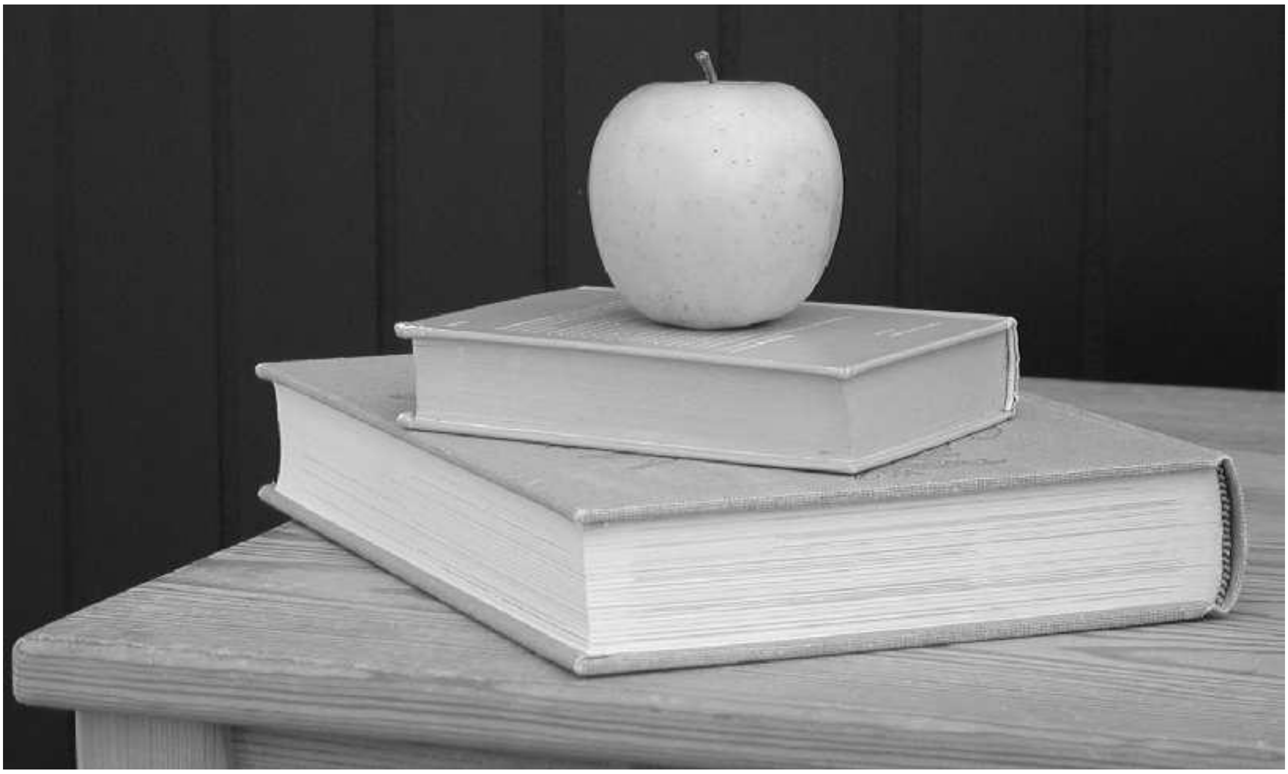
**Slutningsregler:** En regel, hvor man fra en eller flere formler, kan udlede en ny formel.

**Beviser:** Den formel, funktion eller lignende, som man kommer frem til, efter at en rækker formler er gennemløbet.

Den nemmeste måde, hvorved dette forklares, er at gennemløbe et eksempel:

## Eksempel

Det nedenstående eksempel beskriver situationen på dette billede:



**Alfabet:** Her er alfabet begrænset til det danske alfabet, tallene 0-9 og følgende tegn: ) ( , /\ →

**Konstant:** Konstanterne er den store og den lille bog, samt æblet: storebog, lillebog, æble

**Variablerne:** Variablerne er givet ved: x1, x2, x3, …

**Formlerne:** Der bruges formler af typerne: på(t1,t2) og over(t1,t2); hvor t1 og t2 er tilfældige variable eller konstanter. Formlerne skal læses som:

| | |
|---|---|
| På(t1,t2): | På t1 ligger t2 |
| Over(t1,t2) | Over t1 er t2 |

**Aksiomer:** Følgende aksiomer tages i brug:

(A1) på(storebog,lillebog)

(A2) på(lillebog,æble)

(A3) på(x1,x2) → over(x1,x2)

(A4) over(x1,x2) /\ over(x2,x3) → over(x1,x3)

Alle 4 aksiomer er logiske, hvis man kigger på billedet:

På den store bog ligger den lille bog.

På den lille bog ligger æblet.

Hvis en ting (x1) ligger oven på noget (x2), medfører det at denne ting (x1) er placeret over den anden (x2).

Hvis x2 er placeret over x1 og x3 er placeret over x2, må x3 nødvendigvis også være placeret over x1.

Ud fra disse aksiomer vil vi bevise denne formel:

Over(storebog,æble)

**Beviset:** Følgende viser hvordan et bevis på ovenstående formel kunne se ud:

1. på(storebog,lillebog)
2. på(lillebog,æble)
3. på(x1,x2) → over(x1,x2)
4. på(storebog,lillebog) → over(storebog,lillebog)
5. over(storebog,lillebog)
6. på(lillebog,æble) → over(lillebog,æble)
7. over(lillebog,æble)
8. over(storebog,lillebog) /\ over(lillebog,æble)
9. over(x1,x2) /\ over(x2,x3) → over(x1,x3)

10. over(storebog,lillebog) /\ over(lillebog,æble) → over(storebog,æble)
11. over(storebog,æble) [3]

For at forklare beviset, følger de samme trin, denne gang dog kun beskrivelsen af hvad der sker:

1. Aksiom A1
2. Aksiom A2
3. Aksiom A3
4. Aksiom A1 kombineres med aksiom A3
5. Det i punkt 4 fremkomne skrives for sig selv, for overskuelighedens skyld
6. Aksiom A2 kombineres med aksiom A3
7. Det i punkt 6 fremkomne skrives for sig selv, for overskuelighedens skyld
8. De to situationer (punkt 4 og 6) skrives sammen
9. Aksiom A4
10. Aksiom A4 benyttes på de to fremkomne situationer fra punkt 4 og 6
11. Den endelige formel skrives alene

Dette er et formelt system, da jeg kun har gjort nytte af de tidligere nævnte størrelse (alfabet, formler og så videre) og gennem disse kommet frem til et bevis. Faktisk flere beviser, hvis man kigger på punkterne 5, 7 og 11, så er det tre udsagn der er blevet bevist i det samme formelle system.

## Grellings paradoks

Grellings paradoks bygger på det sproglige udtryk *heterologisk.* Et sprogligt udtryk er heterologisk hvis det ikke har den egenskab som det beskriver. For eksempel er begrebet ”bil” heterologisk, da selve begrebet jo ikke *er* en bil. Et eksempel på et ikke-heterologisk begreb er derimod udtrykket ”et abstrakt begreb”, da dette udtryk beskriver dens egen egenskab i og med at udtrykket ”et abstrakt begreb” i sig selv er ”et abstrakt begreb”. Man kan nu stille spørgsmålet: Er det sproglige udtryk ”heterologisk” heterologisk?

[3] http://www2.imm.dtu.dk/~tb/godel.pdf ”side 3-5” (12-02-2009)

For at komme nærmere på et svar antager vi først at dette er tilfældet, altså at det sproglige udtryk ”heterologisk” er heterologisk, hvilket vil sige at heterologisk ikke har den egenskab som det selv er et udtryk for. Altså opstår der en klar modstrid.

Vi vender nu sagen om og antager at det sproglige udtryk ”heterologisk” nu ikke er heterologisk. Altså har det selv den egenskab, som det betegner, altså er det heterologisk – hvilket vi lige har antaget at det ikke var. Altså endnu en modsigelse.

Vi kan nu konkludere at hvad enten vi siger at ”heterologisk” er heterologisk, eller ej, så passer det ikke[4].

## *Gödels sætning*

For at komme nærmere på hvad Kurt Gödels ufuldstændighedssætninger dækker over, er der et par begreber der først skal defineres:

**Konsistent:** Et formelt system kan kaldes konsistent, såfremt at ingen formler i det kan både bevises og modbevises.

**Fuldstændigt:** For at et formelt system er fuldstændigt, skal alle formler enten kunne bevises eller modbevises.

**Ufuldstændigt:** Er, som det ligger i navnet, modsat fuldstændigt, og et formelt system er derfor ufuldstændigt, såfremt der optræder én eller flere formler der hverken kan bevises eller modbevises.

Ved hjælp af disse tre begreber og Grellings paradoks, kan man nu komme nærmere en konkret forståelse af Gödels sætning:

*”I ethvert konsistent formelt system, eksisterer der en formel,*
*som hverken kan bevises eller modbevises”*

For at finde en modstrid (som der ifølge Gödel *vil* være), antager vi at vi har et formelt system, der er konsistent og fuldstændigt. Dette system indeholder så formlen $\varphi_h(x)$, der er repræsentant for mængden af heterologiske tal. Altså gælder det for alle naturlige tal, n:

n er et heterologisk tal $\leftrightarrow$ $\varphi_h(n)$ kan bevises

---

[4] http://www2.imm.dtu.dk/~tb/godel.pdf ”side 6-7” (12-02-2009)

Desuden gælder det at:

n er et heterologisk tal $\leftrightarrow \neg\varphi_n(n)$ (Hvis en formel, $\varphi$, kan modbevises betyder det, at negationen af denne, skrevet $\neg\varphi$, kan bevises.)

Ud fra dette får vi at:

$\varphi_n(n)$ kan bevises $\leftrightarrow \neg\varphi_n(n)$ også kan bevises

Da dette gælder for alle n, lader vi n være lig h:

$\varphi_h(h)$ kan bevises $\leftrightarrow \neg\varphi_h(h)$ kan bevises

Altså ender vi op med en formel, der kan bevises, såfremt at det kan modbevises. Men i og med at systemet var fuldstændigt, skal formlen *enten* kunne bevises eller modbevises, altså opstår der en modsigelse. Ud fra dette kan vi konkludere at såfremt et formelt system er konsistent, kan det ikke samtidig være fuldstændigt – altså findes der i et hvert formelt, konsistent system minimum en formel der hverken kan bevises eller modbevises.[5]

## Matematikkens filosofi

Mange grene af regulær filosofi, kan overføres til matematik og den måde matematikere ser matematikken som en del af verdenen og hvilke begrænsninger denne indeholder. Jeg vil nu kort beskrive en række af disse:

### *Platonisme*

Ifølge den platoniske opfattelse, er matematikken – lige som alt andet – opdelt gennem det platoniske participationsprincip, hvor alt ”eksisterer” todelt, i en fænomenverden og i en ideverden. Inden for matematikken gælder det at cirkler, matematiske trekanter, tallene og så videre findes i et abstrakt univers og i virkeligheden er de, de egentligt eksisterende objekter. Altså udgøres virkeligheden af matematiske objekter[6]. Et platonisk citat til at underbygge dette, er:

[5] http://www2.imm.dtu.dk/~tb/godel.pdf ”side 8” (12-02-2009)
[6] http://www.ruc.dk/cuid/tankensmagt/matematiks_filosofi/ (tvklip fra DK¤ – 10-02-2009)

*"Men da Gud skulle til at indrette verden, begyndte han med ved hjælp af figurer og tal at give en tydelig skikkelse til ild og vand og jord og luft ...*[7]*"*

Ud fra denne opfattelse er det logisk at platonikerne mener at matematikken allerede findes, og skal opdages af matematikere[8], på samme måde som kontinenter i sin tid skulle opdages af opdagelsesrejsende, til trods for at disse allerede fandtes. Under opdagelsen af disse, har man, lige som i fysikken, opstillet en række udsagn der anses for at være korrekte – aksiomer, der for platonisme er, hvad naturlove er for fysikken[9].

## Formalisme

Ifølge formalisterne består matematikken udelukkende af tre ting. Nemlig: aksiomer, definitioner samt teoremer. Disse opnår man gennem diverse symbolmanipulationer efter en række grundantagelser[10]. På denne måde opnår man blandt andet sætninger, ved at manipulere aksiomer, således at man ender op med et bevis for sætninger.

Til trods for en række sammenfald, mener formalisterne dog ikke at matematik og videnskab har en sammenhæng, dog kan strukturerne til tider ligne hinanden[11].

## Logicisme

Ifølge logicismen danner mængdelæren grundlag for al matematik, samtidig med at denne bygger på et logisk grundlag. Generelt er matematikken, ifølge logicisterne, opbygget af sandheder ud fra sande *logiske* aksiomer – det er dog til tider modsigende![12]

Et eksempel på et logicistisk "bevis" kunne være:

"Rosen er rød" og "rød er en farve" derfor: "Rosen er en farve"[13]

De to første led virker logiske for os alle, og vi kan acceptere dem, men når de kobles sammen (her gennem addition) går det galt, da en rose ikke kan beskrives som en farve.

[7] http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M13/andur.htm (10-02-2009)
[8] http://www.ruc.dk/cuid/tankensmagt/matematiks_filosofi/ (10-02-2009)
[9] http://www.ruc.dk/cuid/tankensmagt/matematiks_filosofi/ (10-02-2009)
[10] http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M13/andur.htm (10-02-2009)
[11] http://da.wikipedia.org/wiki/Matematikkens_filosofi (10-02-2009)
[12] http://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=204446 (dias 9 - 10-02-2009)
[13] http://www.frehr.com/images/Tekst/godel.doc (10-02-2009)

## Konstruktivisme/Intuitionisme

En intuitionist/konstruktivist mener at matematik kun består af objekter og teoremer, som man gennem tankens kraft kan konstruere[14]. Indenfor disses kredse er der dog uenighed om hvad man kan konstruere. For eksempel kan man gennem tankens kraft måske konstruere noget uendeligt stort, eller i hvert fald objekter der er større end hvad mennesket rent fysiks kan håndtere og derfor kan der opstå splid om hvorvidt dette bør anses for værende okay eller om det bør udelades.

## Kognitive teorier

Kognitive teorier anser matematikken som værende en del af menneskes bevidsthed og at hjernen derved reagerer forskelligt på forskellige objekter. For eksempel har man fundet ud af at rette linjer frembringer en større reaktion i hjernen end uregelmæssige genstande.[15]
Jeg mener at grunden til at folk er så splittede i deres filosofiske, matematiske opfattelse kan skyldes det ovenstående og hvordan folk har opfattet deres oplevelser med ”pæne” matematiske mønstre. For eksempel kender man til det gyldne snit, som ubevidst anses for værende det pæneste forhold at dele en linje i. Tidligere, går jeg ud fra, havde man ikke denne viden om hvordan hjernen påvirkes og man har derfor måske valgt at lave sine egne teorier. For eksempel at verden er opbygget af matematiske mønstre – ergo finder mennesket dette for værende pænest (platonisme).

## Gödels filosofi

Gödel anses for at være platonist, da han var af den opfattelse at matematik kan reduceres til mængdelære, dette er dog mere logicistisk, men vigtigere af alt mente han at disse mængder optråder i en abstrakt ideverden, hvad enten mennesket har kendskab til det eller ej i den fysiske verden[16]. Mere interessant er det dog hvordan Kurt Gödel har været med til at udfordre formalismen da han beviste at ethvert formelt system, enten er inkonsistent eller ufuldstændigt[17]. Altså har han været med til at ryste formalismen i dens grundvold, i og med at han gik ind og beviste at det de nu

[14] http://www.andersbp.dk/mat/VtMat/projekt.pdf (side 5 - 10-02-2009)
[15] http://da.wikipedia.org/wiki/Matematikkens_filosofi (10-02-2009)
[16] http://www.mathnet.ruc.dk/news/total_3.pdf (side 5 - 10-02-2009)
[17] http://www.robinengelhardt.info/20081121wolpert.pdf (12-02-2009)

en gang tror på, ikke holder i længden – til trods for at tanken om så komplette og ufejlbarlige systemer må virke ”smuk” i matematikeres øjne.

## Litteraturliste

[1] http://ipaper.ipapercms.dk/DSB/udogse/2007/September/ (side 48 – 12-02-2009)

[2] http://www2.imm.dtu.dk/~tb/godel.pdf ”side 3” (12-02-2009)

[3] http://www2.imm.dtu.dk/~tb/godel.pdf ”side 3-5” (12-02-2009)

[4] http://www2.imm.dtu.dk/~tb/godel.pdf ”side 6-7” (12-02-2009)

[5] http://www2.imm.dtu.dk/~tb/godel.pdf ”side 8” (12-02-2009)

[6] http://www.ruc.dk/cuid/tankensmagt/matematiks_filosofi/ (tvklip fra DK4 – 10-02-2009)

[7] http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M13/andur.htm (10-02-2009)

[8] http://www.ruc.dk/cuid/tankensmagt/matematiks_filosofi/ (10-02-2009)

[9] http://www.ruc.dk/cuid/tankensmagt/matematiks_filosofi/ (10-02-2009)

[10] http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M13/andur.htm (10-02-2009)

[11] http://da.wikipedia.org/wiki/Matematikkens_filosofi (10-02-2009)

[12] http://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=204446 (dias 9 - 10-02-2009)

[13] http://www.frehr.com/images/Tekst/godel.doc (10-02-2009)

[14] http://www.andersbp.dk/mat/VtMat/projekt.pdf (side 5 - 10-02-2009)

[15] http://da.wikipedia.org/wiki/Matematikkens_filosofi (10-02-2009)

[16] http://www.mathnet.ruc.dk/news/total_3.pdf (side 5 - 10-02-2009)

[17] http://www.robinengelhardt.info/20081121wolpert.pdf (12-02-2009)